Die Kettenlinie

Maikel Hajiabadi

WS 2016/17

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Definition

Die Kettenlinie (auch Katenoide oder englisch catenary aus dem Lateinischen *catena* = *Kette*) ist eine mathematische Kurve, die den Durchhang einer an zwei Enden aufgehängten Kette unter Einfluss der Schwerkraft beschreibt.

1.2 Geschichte

Das Problem der Kettenlinie, einer an zwei Enden aufgehängten Kette, wurde erstmals von Galileo Galilei (1564 bis 1642) untersucht.
Er glaubte, dass die Kettenlinie der Parabel nicht nur in der Form, sondern auch inhaltlich ähnlich (!nicht gleich) sei, da sie wie die Wurfparabel von zwei Kräften beeinflusst wird, der Schwerkraft und der Spann- bzw. der Horizontalkraft (im Vergleich zur Schwerkraft und der vorantreibenden Kraft). Der deutsche Mathematiker, Physiker und Philosoph Joachim Jungius (1587 bis 1657) zeigt in seiner 1639 erschienenen „Geometria empyrica“, dass es sich bei der Kurve nicht um eine Parabel handelt.
Auch Christian Huygens (1629 bis 1695) zeigte 1646, dass die Kettenlinie keine Parabel sein könne, für die Herleitung fehlten ihm jedoch noch Kenntnisse der erst kurz zuvor von Leibniz entdeckten Infinitesimalrechnung. Also schrieb er einen Brief an Leibniz mit dem Vorschlag, er könne doch seine neue Entdeckung gleich am Beispiel der Kettenlinie demonstrieren. Gottfried Wilhelm Leibniz nahm auch diese Herausforderung an und leitete im Jahre 1690 die exakte Beschreibung der Kettenlinie mit Hilfe ihrer physikalischen Gegebenheiten her. Da aber zu dieser Zeit “Quelllcode-Klau“ gang und gäbe war und er sich der Richtigkeit seiner Lösung nicht sicher war, hielt Leibniz seine Herleitung zurück und rief zu einem Wettbewerb aus, bei dem es darum ging, eine Herleitung der Kettenlinie zu finden. Die einzigen Einsendungen, die er bekam, waren von Johann Bernoulli und Huygens, die ebenfalls eine vollständige mathematisch richtige Lösung gefunden hatten.
Im Juni des folgenden Jahres wurden die drei voneinander unabhängig gefundenen richtige Lösungen veröffentlicht, der Name *catenary* wurde von Huygens Lösung schließlich übernommen.

Abbildung 1: Beispiel von zwei Kettenlinien, das vermutlich jeder kennt.

2 Herleitung der Formel

2.1 Hilfssätze

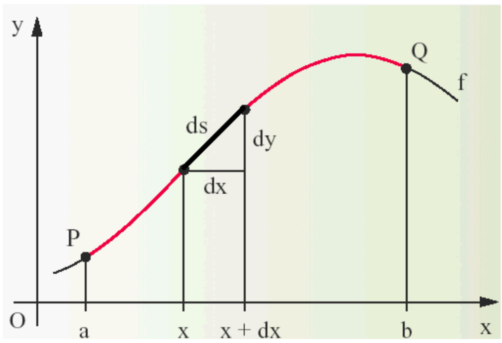
Für die Rechnungen auf den folgenden Seiten brauchen wir des Öfteren zwei Aussagen:
1. Diese Aussage sollte bekannt sein und wird nur erwähnt, um sie erneut ins Gedächtnis zu rufen:

$$cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$$

2. Sei $f(x) = y$ eine Funktion, so lässt sich die Kurvenlänge L zwischen x_1 und x_2 folgendermaßen berechnen:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Beweis:
Gehen wir zunächst davon aus, dass die Funktion für ein kleines Stück konstant sei, so können wir die Länge ds folgendermaßen darstellen:



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

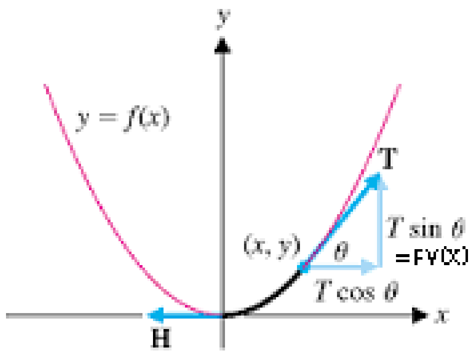
Wenn wir das zu betrachtende Stück nun infinitesimal klein werden lassen, so ergibt sich folgender Term:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Summiert man nun die "Menge aller Punkte zwischen x_1 und x_2", so folgt die Aussage.

q.e.d.

2.2 “Ursprüngliche“ Version



Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten. Zuerst betrachten wir die “ursprüngliche“ Herleitung (, jene mit welcher das Problem zu Zeiten von Leibniz, Huygens und Bernoulli gelöst wurde). Bei dieser Herleitung betrachtet man folgende Kräfte, welche auf jeden Punkt des Seils wirken, jedoch nicht alle stets gleich sind: Die vertikale Kraft $F_V(x)$, die horizontale Kraft $F_H(x)$ und die Spannkraft (engl. Tension) $T(x)$, welche die “gesamtwirkende Kraft“ auf unseren Punkt darstellt (“zieht“ den Punkt also in **tangentiale** Richtung). Schnell stellt man fest, dass die horizontale Kraft in jedem Punkt gleich ist, da sich entgegengesetzte Kräfte ausgleichen, in welche Richtung wir die wirkende Kraft nun betrachten spielt hierbei keine Rolle, da es nur um die Beträge der jeweiligen Kräfte geht. Wäre die horizontale Kraft nicht konstant, so müsste sich das Seil weiterhin bewegen um den Kräfteausgleich zu bewirken. (Anmerkung: die horizontal wirkende Kraft wird lediglich von den Aufhängepunkten des Seils beeinflusst) $\Rightarrow F_H(x) = H \neq 0$ konstant. Aber was ist nun mit den anderen Kräften?

Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass sich $F_V(x)$ sich als Produkt der Länge des Seilstücks L vom Scheitel bis zum betrachteten Punkt $(x|y)$ ($L =: s(x)$), multipliziert mit der Masse je Meter Seil μ und dem (Erd-)Beschleunigungsfaktor g dargestellt werden kann. Es gilt also:

$$F_V(x) = \mu \cdot g \cdot s(x) = \mu \cdot g \cdot \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}dx$$

jedoch können wir die Kräfte auch folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} F_H(x) &= T(x) \cdot cos(\Theta) \\ F_V(x) &= T(x) \cdot sin(\Theta) \\ \Rightarrow y' = tan(\Theta) = \frac{F_V(x)}{F_H(x)} &= \frac{\mu \cdot g}{H} \cdot s(x) \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich nach Differenzierung nach x die **DGL der Kettenlinie**:

$$\Rightarrow y'' = k \cdot \sqrt{1 + y'^2}, \;\; k := \frac{\mu \cdot g}{H}$$

Diese gilt es nun zu lösen, hierfür substituiere zunächst $z := y'$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} z' = k \cdot \sqrt{1+z^2} \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= \int k dx \\ \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= kx + d \end{aligned}$$

Das Integral auf der linken Seite wird mittels erneuter Substitution gelöst:

$$\begin{aligned} z =: sinh(u) \Rightarrow dz = cosh(u)du \\ \Rightarrow \int \frac{cosh(u)du}{\sqrt{cosh^2(u)}} = u + e \\ \Rightarrow sinh^{-1}(z) + e = kx + d \Leftrightarrow z = sinh(kx+d) - e \\ \Rightarrow y' = sinh(kx+d) - e \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = \frac{1}{k} cosh(kx+d) + e'$, $[e' := -e + f$ (konstante die beim Integrieren entsteht)]

Wobei die Kettenlinie oft mit folgendem Term in "schönerer Form" dargestellt wird:

$$f(x) = acosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + C$$

Hier beschreibt x_0 die Verschiebung in x-Richtung und C die Verschiebung in y-Richtung bezüglich des ursprünglichen Scheitels, welcher die y-Koordinate a besaß.
Es bleibt außerdem festzuhalten, dass NICHT jede $acosh(bx)$ Funktion eine Kettenlinie darstellt. Es muss weiterhin gelten $b = \frac{1}{a}$, wobei $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2.3 Lösungs mittels potentieller Energie

Hierfür brauchen wir zunächste die Formel der potentiellen Energie, welche wie folgt lautet: $E_{pot} = mgh$, wobei g erneut unser Beschleunigungsfaktor ist, m die Masse des zu betrachtenden Objekts und h die Höhe beschreibt, in welcher es befindet. Für unsere vorherrschende Situation jedoch, muss man diese Formel ein wenig "Umwandeln". Hier betrachtet man kein Objekt als ganzes, sondern setzt die potentielle Energie aus der Summe der potentiellen Energie aller Teilchen des Seils zusammen, es folgt:

$$E_{pot} = \int_a^b g \cdot \mu \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot y$$

Nach kurzer Überlegung stellt man fest, dass die einzelnen "Teilchen" des Seils alle soweit fallen, wie es ihnen möglich ist und somit potentielle Energie in kinetische umgewandelt wird. $\Rightarrow E_{pot}$ wird minimal!
Jedoch sind sowohl μ als auch g Konstanten $\Rightarrow \int_a^b \left(\sqrt{1+y'^2} \cdot y\right) dx$ muss extremal (hier minimal) werden.
Hier hilft die sogenannte $Euler - Lagrange - Gleichung$ weiter, welche besagt:

$$\int_a^b f(x,y,y')dx \text{ ist extremal} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} - \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} = 0$$

Warum hierbei das Extremum ein Minimum sein muss, wird dem Leser als kleine Denkaufgabe überlassen.
Hier ist $\int_a^b f(x,y,y)dx = \int_a^b (\sqrt{1+y'^2} \cdot y)dx$, folglich muss also gelten:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\frac{\partial(\sqrt{1+y'^2}\cdot y)}{\partial y'} && -\frac{\partial(\sqrt{1+y'^2}\cdot y)}{\partial y} && = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} && -\sqrt{1+y'^2} && = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{(yy''+y'^2)\left(\sqrt{1+y'^2}\right) - yy' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2} && -\sqrt{1+y'^2} && = 0 \mid \cdot (\sqrt{1+y'^2})(1+y'^2) \\
\Leftrightarrow\quad & (yy''+y'^2)(1+y'^2) - yy' \cdot y'y'' && -(1+y'^2)^2 && = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & yy'' + y'^2 \cancel{+yy'^2y''} \cancel{+y'^4} \cancel{-yy'^2y''} && -(1+2y'^2 \cancel{+y'^4}) && = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad yy'' - y'^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

Nun muss man einen kleinen Trick anwenden, nämlich die Gleichung noch einmal nach x differenzieren:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & y'y'' + yy''' - 2y'y'' = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & yy''' - y'y'' = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & y^2\left(\frac{yy''' - y'y''}{y^2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & y^2\left(\frac{y''}{y}\right)' = 0
\end{aligned}$$

Man kann nun aufgrund der vorherrschenden Situation den trivialen Fall $y = 0$ ausschließen. Somit folgt sofort:
$\Rightarrow y'' = cy$, $c \in \mathbb{R}$, was durch das **Lösungssystem** $\{e^{\sqrt{c}x}, e^{-\sqrt{c}x}\}$ gelöst werden kann.

$$y = a_1(e^{\sqrt{c}x} + e^{-\sqrt{c}x}) + a_2(e^{\sqrt{c}x} - e^{-\sqrt{c}x}), \;\; a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Nach kurzem Überlegen wird außerdem klar, dass $y(-x) = y(x)$ gelten muss, die Kurve also achsensymmetrisch zu y-Achse ist, woraus folgt, dass $a_2 = 0$ und $a_1 \neq 0$ gelten muss.

$$\Rightarrow y = a_1 cosh(\sqrt{c}x) \tag{2}$$

Nun gilt es, a_1 zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
(1) \Rightarrow \qquad & ca_1^2 cosh^2(\sqrt{c}x) - ca_1^2 sinh^2(\sqrt{c}x) = 1 \\
\Leftrightarrow \qquad & a_1^2 c(cosh^2(\sqrt{c}x) - sinh^2(\sqrt{c}x)) = 1 \\
\Leftrightarrow \qquad & a_1 = \frac{1}{\sqrt{c}}, \Rightarrow c, a_1 \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Und somit ist das Problem mittels (2) gelöst.Die Gleichung der Kettenlinie lautet:

$$y = acosh\left(\frac{x}{a}\right), \; a := \frac{1}{\sqrt{c}}$$

Bemerkung:
Generell ist das Problem, aus zwei Aufhängepunkten x_1 und x_2, der Länge des Seils L und dem Scheitelpunkt $S(0|D)$ eine Kettenliniengleichung zu ermitteln, nur numerisch lösbar, da es keinen geschlossenen Ausdruck für a gibt.
Hierfür beachtet man $S(0|D) \Rightarrow acosh\left(\frac{0}{a}\right) + C = D \Leftrightarrow C = D - a$ und hat folglich gegeben:

$$y = a \cdot cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + (D - a)$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{1 + y'^2})dx = \int_{x_1}^{x_2} cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) = asinh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) - asinh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right)$$

Ist jedoch gegeben, dass die Kettenlinie keine Verschiebung in y-Richtung besitzt, so kann man mithilfe des Scheitelspunkts sofort die gesamte Gleichung ablesen:
Sei S($x_0|\ \xi$) der Scheitel, so gilt:

$$f(x) = \xi \cdot cosh\left(\frac{x - x_0}{\xi}\right)$$

3 Unverkennbare Ähnlichkeit zur Parabel

Nun kennt man die exakte Gleichung der Kettenlinie. Jedoch hatte Galilei damals gar nicht so unrecht, was die Ähnlichkeit zwischen der Kettenlinie und der Parabel angeht, äußerlich sehen sich die Kurven nun mal auf jeden Fall ähnlich.
Im folgenden Abschnitt werden inhaltliche Ähnlichkeiten vorgestellt.

3.1 Die Kettenlinie ist KEINE Parabel

Dies funktioniert dank der bereits geleisteten Vorarbeit nun denkbar einfach.
Beweis: Nehme an, es handle sich bei der Kettenlinie um eine Parabel, d.h.:

$$\exists f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}$$

sodass sich mithilfe der **DGL der Kettenlinie** folgende Bedingung ergibt:

$$\begin{aligned} y'' &= k \cdot \sqrt{1 + y'^2} = 2a \\ \Leftrightarrow y' &= \sqrt{\left(\frac{2a}{k}\right)^2 - 1} \qquad | a_1 := \sqrt{\left(\frac{2a}{k}\right)^2 - 1} \\ \Rightarrow y &= a_1 x + c, \;\; c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dies ist aber offensichtlich keine Parabelgleichung! $\lightning$

3.2 Taylorentwicklung der Kettenlinie

Obwohl es sich bei der Kettenlinie nicht um eine Parabel handelt, weist diese dennoch eine gewisse "Verwandtschaft" zur Parabel auf, betrachte hierfür die Taylorentwicklung der Kettenlinie.
Stelle zunächst die *n-te Ableitung der Kettenlinie* auf:

$$f(x) = a \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right),\; f'(x) = sin\left(\frac{x}{a}\right),\; f''(x) = \frac{1}{a} \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$\Rightarrow f^{(2n)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{2n} \cdot a \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right),\; f^{(2n+1)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1} \cdot a \cdot sinh\left(\frac{x}{a}\right),\; n \in \mathbb{N}_0$$

Es ergibt sich folgende Taylorentwicklung für die Kettenlinie:

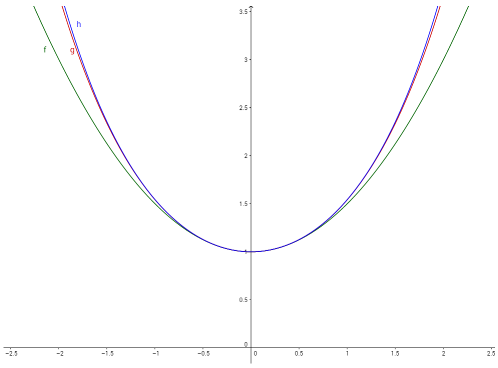
$$Tf(x; x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{2n-1} \cdot cosh\left(\frac{x_0}{a}\right)}{(2n)!} \cdot (x - x_0)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{2n} \cdot sinh\left(\frac{x_0}{a}\right)}{(2n+1)!} \cdot (x - x_0)^{2n+1}$$

Betrachte nun $Tf(x; 0)$ genauer. Da $cosh(0) = 1$ und $sinh(0) = 0$ ist, ergibt sich sofort:

$$Tf(x; 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{a^{2n-1} \cdot (2n)!}$$

Man sieht also schon, dass die Partialsummen der Taylorentwicklung Polynome vom Grad $2n$ mit **ausschließlich graden Exponenten** sind, was eine Parabelform schlussfolgert. Um sich dies zu verdeutlichen, betrachte folgende Situation:

Sei $h(x)$:=cosh(x), so gilt für die Partialsummen S_k der Taylorentwicklung dieser Funktion:



$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

$$\Rightarrow S_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 =: f(x),\ \ S_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 =: g(x).$$

Und man sieht mit Hilfe der Grafik, dass die **Parabeln** f und g gute Approximationen der Kettenlinie h für einen kleinen Bereich um die 0 sind.

3.3 Die Kettenlinie wird zu Parabel

In den vorherigen beiden Abschnitten hat man gezeigt, dass es sich bei der Kettenlinie nicht um eine Parabel handelt, diese jedoch mittels einer Parabel approximiert werden kann. Dennoch ist es möglich, ein hängendes Seil bzw. eine hängende Kette so zu beeinflussen, dass sie Parabelform annimmt. Ein Beispiel dafür sieht man hier: die Golden Gate Bridge. Die hier abgebildeten Seile bilden nämlich keine, wie man anfangs vielleicht vermuten mag, Kettenlinien, sondern Parabeln, also Vorsicht!

Man betrachte nun also Seile unter **konstanter Linienlast**, d.h. das Eigengewicht des Seils kann vernachlässigt werden (bei hinreichend schweren Konstruktionen).
Sei q die Masse der Brücke pro Meter, so folgt:

$$\begin{aligned} V(x) &= q \cdot g \cdot x \\ \Rightarrow y' &= \frac{q \cdot g}{H} \cdot x \\ \Longrightarrow y &= \frac{q \cdot g}{H} \cdot x^2 + c,\ \ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.4 Parabel Brennpunkt $\Rightarrow$ Kettenlinie?

Es wurde herausgefunden, dass ein weiterer Zusammenhang zwischen der Kettenlinie und der Parabel besteht: Wenn man die Parabel über die x-Achse rollen lässt und dabei den Brennpunkt verfolgt, so entsteht eine Kettenlinie. Um den Beweis etwas einfacher zu halten, wird hier lediglich eine Normalparabel betrachtet, der Beweis funktioniert zwar für jede Parabel, dies würde ihn jedoch etwas komplizierter gestalten.
Für die Konstruktion nehme man sich zuerst einen beliebigen Punkt P auf der Parabel, durch welchen man die Parabel über die x-Achse rollen lassen.
Dies klingt zugegebenermaßen erst einmal etwas schwierig, ist jedoch einfacher als es scheint.
Zu Beginn stellt man sich die Frage, inwiefern man die Parabel mithilfe eines Punktes P über die x-Achse rollen lassen kann. Nun ja, man verdeutliche sich dies erst einmal durch folgende Skizze:

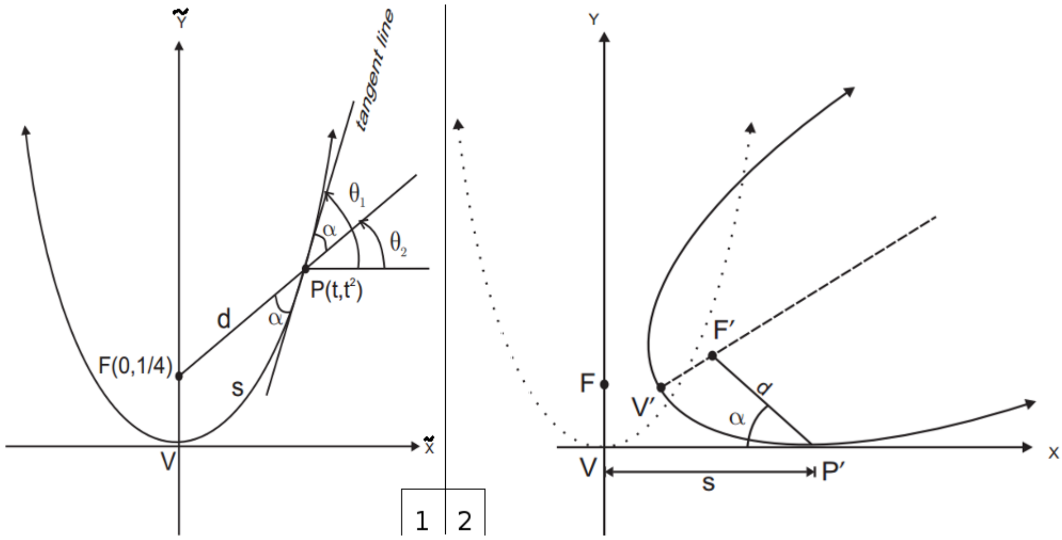


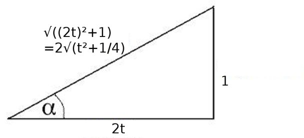
Abbildung 2: Bild1:Parabel in der Ausgangposition, Bild2: die Abgerollte Parabel

Wie man sieht, beeinflusst der Punkt P also gerade jene Strecke, welche die Parabel auf der x-Achse zurück gelegt hat(jene, welche man auf der Parabel vom Ursprung zum Punkt P zurücklegt).
Es geht nun darum, eine Gleichung zu finden, welche die Koordinaten des Punktes F' beschreibt, während die Parabel auf der x-Achse "entlang rollt". Hierbei macht man sich zu Beginn vor allem die Steigung der Gerade d und der Tangente im Punkt P zu Nutze.

$$\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix},\ tan(\theta_1) = 2t,\ tan(\theta_2) = \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{t}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow tan(\alpha) \quad & = tan(\theta_1 - \theta_2) \\
\Leftrightarrow \quad & = \frac{tan(\theta_1) - tan(\theta_2)}{1 + tan(\theta_1)tan(\theta_2)} \\
\Leftrightarrow \quad & = \frac{2t - \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{t}}{1 + \left(2\cancel{t}\frac{t^2 - \frac{1}{4}}{\cancel{t}}\right)} \\
\Leftrightarrow \quad & = \frac{t^2 + \frac{1}{4}}{t} \cdot \frac{1}{2\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)} \\
\Leftrightarrow \quad & = \frac{1}{2t}
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe von $tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$ und des Satzes von Pythagoras folgt nun sofort:
$\Rightarrow cos(\alpha) = \frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}}$ und $sin(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}}$.



Des Weiteren ist mittels *Abbildung* 2 offensichtlich:

$$x(t) = s(t) - dcos(\alpha) \tag{3}$$

$$y(t) = dsin(\alpha) \tag{4}$$

$$d = |\overrightarrow{FP}| = \sqrt{t^2 + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{t^4 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = t^2 + \frac{1}{4}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_0^t \sqrt{1 + 4x^2}dx$$

Dieses Integral löst man mittels geschickter Substitution $x = \frac{tan(u)}{\sqrt{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{2}cos^2(u)}du$. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= [\frac{1}{4}(2\sqrt{4x^2 + 1}x + \frac{1}{4}ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})]_0^t \\
&= [x\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}sinh^{-1}(2x)]_0^t \\
&= t\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}sinh^{-1}(2t)
\end{aligned}
$$

Nun kommen (3) und (4) wieder ins Spiel:

$$(3) \Rightarrow x(t) = \cancel{t\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} + \frac{1}{4}sinh^{-1}(2t) - \cancel{(t^2 + \frac{1}{4}) \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}}} = \frac{1}{4}sinh^{-1}(2t)$$

$$(4) \Rightarrow y(t) = (t^2 + \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}$$

Stelle nun x(t) nach t um:

$$x(t) = \frac{1}{4} sinh^{-1}(2t)$$
$$\Leftrightarrow \frac{sinh(4x)}{2} = t$$

Alternativ, ohne Kenntnis der Formel von $sinh^{-1}$:

$$x(t) = \frac{1}{4} ln(2t\sqrt{2t} + \sqrt{4t^2+1})$$
$$\Leftrightarrow e^{4x} = 2t + \sqrt{4t^2+1} \tag{5}$$

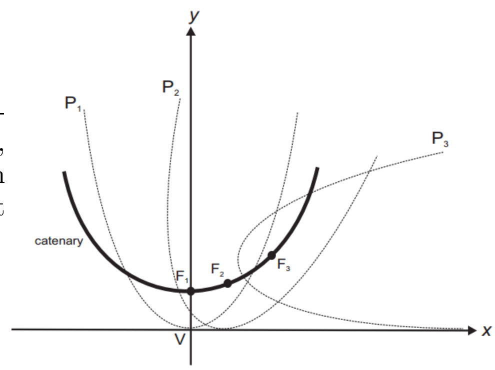
$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{4x}} = \frac{1}{2t+\sqrt{4t^2+1}}$$
$$\Leftrightarrow e^{-4x} = \frac{1}{2t+\sqrt{4t^2+1}} \cdot \frac{2t-\sqrt{4t^2+1}}{2t-\sqrt{4t^2+1}} = \frac{2t-\sqrt{4t^2+1}}{4t^2-(4t^2+1)} = -(2t-\sqrt{4t^2+1}) \tag{6}$$

$$\frac{(5)-(6)}{4} \Rightarrow \left(\frac{sinh(4x)}{2} =\right) \frac{e^{4x}-e^{-4x}}{4} = t$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{sinh(4x)}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(cosh^2(4x)-1)+1}{4}}$$

$$\Longrightarrow y(x) = \frac{1}{4} \cdot cosh(4x)$$

Es ist nun also gezeigt, dass der Brennpunkt der Normalparabel den Graphen einer Kettenlinie "entlangläuft", wenn man die Parabel auf der x-Achse abrollt (Rechts noch einmal die Entstehung der Kettenlinie mittels Brennpunkt der Parabel).



4 Schlusswort

4.1 3 Berechnungen - 1 Ergebnis

Eine weitere tolle Eigenschaft der "Normalkettenlinie" zeigt sich bei der Berechnung der Länge der Kurve und dem Integral vom Nullpunkt bis zum Punkt x, sowie der Punktsteigung der Kettenlinie:
Sei $f(x) = cosh(x)$

1. $f'(x) = (cosh(x))' = sinh(x)$
2. $F(x) = \int_0^x cosh(x)dx = sinh(x)$
3. $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + sinh^2(x)}dx = \int_0^x \sqrt{cosh^2(x)}dx = sinh(x)$

Wie man also sehen kann, ist die Punktsteigung gleich dem Flächeninhalt der Kurve und der Länge des Kurvenstücks.

4.2 Rotation um die x-Achse

Die Kettenlinie besitzt außerdem die faszinierende Eigenschaft. Bei der Rotation um die x-Achse erzeugt sie eine sogenannte Minimalfläche, das **Katenoid**. Eine Minimalfläche ist eine Fläche im Raum, die lokal minimalen Flächeninhalt hat, d.h. es gibt keine Fläche, welche "glatt" (differenzierbar) ist, von jenen Kreisringen mit dem selbem Abstand wie in der betrachteten Situation eingespannt wird und kleineren Flächeninhalt besitzt.
Anschaulich lässt sich dies durch einen Seifenblasenfilm verdeutlichen. Dieser würde jene Form annehmen, wenn man ihn über die beiden Randkurven "spannen" würde.
Katenoide sind die einzigen Minimalflächen, die zugleich auch Rotationsflächen sind und genügen mit einem positivem Parameter a folgender Gleichung:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = acosh\left(\frac{z}{a}\right)$$

und sehen folgendermaßen aus:

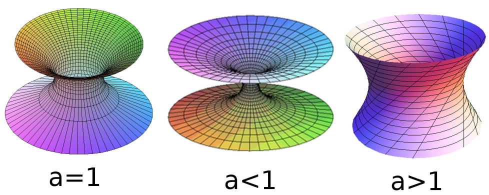


Abbildung 3: Katenoide mit verschiedenen Parametern a

4.3 Fazit

Wie man also sieht, verbindet die Parabel und die Kettenlinie viel mehr, als man zu Beginn vielleicht vermutet hätte, jedoch ist festzuhalten, dass es sich **nicht** um dieselbe Kurve handelt. jetzt wird noch auf ein paar Dinge eingegangen, welche es nicht mehr in den Vortrag geschafft haben, deshalb werde ich sie auch nur grob anreißen und nicht beweisen.
Ein weiter wesentlicher Unterschied zwischen der Kettenlinie und der Parabel ist jener, dass die Kettenlinie, ohne verschoben zu werden, niemals die x-Achse schneiden kann, die Parabel jedoch schon. Außerdem ist bei der Kettenlinie das Wachstum der Funktionswerte zum ∞ hin viel größer als bei der Parabel.
Wie beeinflussen die Aufhängepunkte die Gleichung der Kettenlinie, welches ein Seil bestimmter Länge annimmt? Je weiter auseinander die Aufhängepunkte liegen, desto größer wird der Parameter a. Des Weiteren bemerkt man auch, dass für die endgültige Form der Kettenlinie nur die Aufhängepunkte sowie des Länge des Seils relevant ist, das Gewicht der Kette selbst spielt jedoch keine Rolle. D.h. nehmen wir schwereres Material und hängen es auf, so ergibt sich dieselbe Form, wichtig ist nur, dass das Objekt einzig und allein von der Schwerkraft beeinflusst wird, wie stark diese jedoch ist, spielt auch keine Rolle.
$\Rightarrow$ Auf dem Mond oder unter Wasser (bei nicht schwimmenden Objekten) ergibt sich dieselbe Form. Was ist nun, wenn das Material normalerweise schwimmt und unter Wasser aufgehängt wird? Es ergibt sich eine an der x-Achse gespiegelte Kettenlinie, vorausgesetzt die Aufhängepunkte sind tief genug gesetzt.
Selbst heute besitzt die Kettenlinie noch eine große Bedeutung in der Architektur. Wir erinnern uns erneut an die zweite vorgestellte Herleitung. Hier ist eingeflossen, dass die potentielle Energie minimal sein muss, somit besitzt ein Bogen in Kettenliniengestalt minimale potentielle Energie und kann höhere Lasten tragen, als anders geformte Lastenträger, da dieser sich selbst am wenigsten belastet.
Zum Schluss noch ein weiteres Beispiel einer Kettenlinie aus der Natur:

Abbildung 4: Durch Tautropfen betont, bilden Spinnenfäden Kettenlinien

5 Quellen

Deutsche Quellen

http://www.mathematische-basteleien.de/kettenlinie.html
http://www.nibis.de/~lbs-gym/Verschiedenespdf/Kettenlinie.pdf
http://www.mathe-seiten.de/kettenlinie.pdf
https://de.wikibooks.org/wiki/Stereostatik:_Seile_und_Ketten
http://www.fvss.de/assets/media/jahresarbeiten/mathe/kettenlinien.pdf
https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/die-kettenlinie
http://teacher.eduhi.at/alindner/Sites/Artikel/Kettenlinie-Arikel.pdf
http://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=506&ref=http
Vorlesungen über Differential- Und Integralrechnung, Autor: Emanuel Czuber
Geschichte der Baustatik: Auf der Suche nach dem Gleichgewicht, Autor: Karl-Eugen Kurrer
https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenlinie_(Mathematik)
Kurven Erkunden und Verstehen, Autoren: Haftendorn, Dörte
http://home.eduhi.at/teacher/alindner/Dyn_Geometrie/Kettenlinie/
http://www.arndt-bruenner.de/mathe/java/kettenlinie.htm
http://www.nibis.de/~lbs-gym/Verschiedenespdf/Kettenlinie.pdf

Englische Quellen

https://plus.maths.org/content/rolling-parabollically
http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/cmj_ftp/CMJ/March%202010/3%20Articles/5%20Agarwal/locus_of_focus-final_version.pdf
https://www.geogebra.org/material/show/id/hu24XTaZ
https://www.sonoma.edu/users/w/wilsonst/papers/Cat/cat.html
http://jcsites.juniata.edu/faculty/bukowski/leiden/cmj002-011.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=02MCBzw6kVg